	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO Curso **2020-2021** **MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	**Modelo** Orientativo

INSTRUCCIONES Y CRITERIOS GENERALES DE CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a **cinco** preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se proponen.

CALIFICACIÓN: Cada pregunta se valorará sobre 2 puntos.

TIEMPO: 90 minutos.

A. 1. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se consideran las matrices A y B dadas por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Determine los valores de los parámetros reales a, b y c para que se verifique $A^2 = A - B$.
b) Para $a = b = c = 2$, estudie si la matriz A es invertible y, en caso afirmativo, calcule su inversa.

A. 2. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real $f(x)$ definida por

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

a) Obtenga los coeficientes reales a, b y c, de $f(x)$ sabiendo que la función tiene un extremo relativo en el punto de abscisa $x = -3$ y que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$ es $y = 6x + 8$.
b) Para $a = 2, b = 1$ y $c = 1$, calcule la integral $\displaystyle\int_1^e \frac{f(x)}{x}\,dx$

A. 3. (Calificación máxima: 2 puntos)
Dada la función

$$f(x) = x + \frac{4}{x^2}$$

a) Halle el dominio de la función y sus asíntotas.
b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y, si los hubiera, sus extremos relativos.

A. 4. (Calificación máxima: 2 puntos)
En un mercado agropecuario el 70 % de las verduras que se comercializan son de proximidad y el resto no. El 30 % de las verduras de proximidad son ecológicas, mientras que de las que no son de proximidad, solo son ecológicas el 10 %. Si un cliente elegido al azar ha realizado una compra de una verdura, calcule las siguientes probabilidades:

a) Probabilidad de que la verdura comprada no sea ecológica.

b) Probabilidad de que la verdura sea de proximidad o ecológica.

A. 5. (Calificación máxima: 2 puntos)
El número de kilómetros que un corredor entrena a la semana mientras prepara una carrera popular se puede aproximar por una variable aleatoria de distribución normal de media μ horas y desviación típica $\sigma = 10$ horas.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 20 atletas, obteniéndose una media muestral de 30 kilómetros. Determine un intervalo de confianza al 95 % para μ.
b) Suponga que $\mu = 28$ kilómetros. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 10 atletas, la media muestral, $\overline{X}$, esté entre 28 y 30 kilómetros.

B. 1. (Calificación máxima: 2 puntos)
Un agricultor dispone de 5 hectáreas, como máximo, de terreno para dedicar a la plantación de trigo y cebada. Cada hectárea dedicada al trigo le supone un beneficio de 200 euros, mientras que cada hectárea dedicada a la cebada le supone un beneficio de 60 euros. Entre ambos cultivos es obligatorio plantar como mínimo una hectárea, y la normativa autonómica le obliga a que el cultivo de trigo ocupe como mucho una hectárea más que el de cebada. Represente la región factible, determine las hectáreas que debería dedicar a cada cultivo para maximizar sus beneficios y obtenga el valor del beneficio máximo.

B. 2. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + y + z & = & 2a - 1 \\ 2x + y + az & = & 1 \\ x + ay + z & = & 1 \end{array}\right.$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a.
b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 0$.

B. 3. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \left\{\begin{array}{ll} x^2 + ax - \dfrac{1}{9} & \text{si } x \leq 0\,, \\ \dfrac{x+1}{x^2 - 9} & \text{si } x > 0\,. \end{array}\right.$$

a) Determine el dominio de $f(x)$ y calcule el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que $f(x)$ sea derivable en todo su dominio.
b) Para $a = 0$ determine, si existen, las asíntotas de $f(x)$.

B. 4. (Calificación máxima: 2 puntos)
Sean C y D dos sucesos de un experimento aleatorio tales que $P(C) = 0'4$, $P(D) = 0'6$ y $P(C \cup D) = 0'8$. Calcule:

a) $P(C|D)$.
b) $P(\overline{C \cap D}|C)$.

B. 5. (Calificación máxima: 2 puntos)
Las calorías consumidas por un atleta durante una carrera popular se pueden aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ calorías y desviación típica $\sigma = 300$ calorías.

a) Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor de 100 calorías con un nivel de confianza del 95 %.
b) Suponga que $\mu = 3000$ calorías. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de tamaño $n = 50$ atletas, la media de las calorías consumidas durante la carrera por los 50 atletas sea mayor que 2700 calorías.

SOLUCIONES

(Documento de trabajo Orientativo)

Solución A. 1.

a) La respuesta es $a = c = -1$ y $b = -2$. En efecto,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a & 1 & 0 \\ 2b+ac & 2c & 1 \end{pmatrix} = A - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a-1 & 1 & 0 \\ b-1 & c-1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow 2a = a-1, 2c = c-1, 2b+ac = b-1 \Longrightarrow a = -1 = c \text{ y } b = -2$$

b) Con $a = c = b = 2$, se tiene que $|A| = 1$ y como $A^{-1} = \dfrac{Adj(A^t)}{|A|}$ se sigue que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución A. 2.

a) En $x = -3$ hay extremo relativo: $f'(-3) = 0 \Longleftrightarrow -6a + b = 0$. La recta tangente en $x = 0$ es: $y = 6x + 8$. Tanto $f(x)$ como la recta tangente pasan por el punto de coordenadas $(0, 8)$. Entonces, $c = 8$. Además, la pendiente de la recta tangente, $m = 6 = f'(0) = b$ Luego, sustituyendo $b = 6$ en la ecuación $-6a + b = 0$, se tiene, $a = 1$. Por lo que $f(x) = x^2 + 6x + 8$.

b) $f(x) = 2x^2 + x + 1$.

$$\int_1^e \frac{f(x)}{x}\,dx = \int_1^e (2x + 1 + \frac{1}{x})\,dx = \left[x^2 + x + \ln x\right]_1^e = e^2 + e - 1$$

Solución A. 3.

a) El dominio es Dom $f = \mathbb{R} - \{0\}$ Asíntota vertical $x = 0$, no hay horizontales y oblicua $y = x$. Todos los límites salen casi directos.

b) Puesto que $f'(x) = 1 - \dfrac{8}{x^3} = 0 \Longleftrightarrow x = 2$, los intervalos son:

i) $(-\infty, 0)$ y $(2, \infty)$ la derivada es positiva y por tanto la función creciente.

ii) $(0, 2)$ la derivada es negativa y por tanto la función decreciente. Por tanto hay un mínimo local en $x = 2$.

Solución A. 4.

Definimos los sucesos P:Proximidad, E: Ecológica.

a)

$$P(\overline{E}) = 1 - P(E) = 1 - 0'24 = 0'76$$

donde

$$P(E) = P(E|P)P(P) + P(E|\overline{P})P(\overline{P}) = 0'24$$

b)

$$P(P \cup E) = P(P) + P(E) - P(P \cap E) = 0'73$$

donde $P(P \cap E) = P(E|P)P(P) = 0'21$

Solución A. 5.

a) $\text{IC}_{95\,\%}(\mu) = (25'617, 34'382)$

b) $P(28 < \overline{X} < 30) = 0'2357$

Solución B. 1.
Sea x las hectáreas dedicadas al trigo e y las hectáreas dedicadas a la cebada. Entonces:

$$S = \{x + y \geq 1, x + y \leq 5, x - y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\},$$

con vértices $A = (1, 0)$, $B = (0, 1)$, $C = (3, 2)$ y $D = (0, 5)$.
La función beneficio es $B(x, y) = 200x + 60y$. Evaluamos en los vértices de la región factible obtenidos:

- $B(1, 0) = 200$
- $B(0, 1) = 60$
- $B(3, 2) = 720 \to$ Máximo
- $B(0, 5) = 300$

El máximo beneficio se obtiene destinando 3 hectáreas al trigo y 2 a la cebada, y se obtiene un beneficio de 720 euros.

Solución B. 2.
a)

$$|A| = \left| \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix} \right| = -a^2 + 3a - 2 = 0 \Longleftrightarrow a = 1 \text{ o } a = 2.$$

Si $a \neq 1, 2 \Longrightarrow Rg(A) = Rg(A|B) \Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado.
Si $a = 1$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \Longrightarrow Rg(A) = Rg(A|B) = 2 \Longrightarrow$$

Compatible Indeterminado.
Si $a = 2$,

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right) \Longrightarrow Rg(A) = 2 \neq Rg(A|B) = 3 \Longrightarrow$$

Incompatible.
b) Si $a = 0$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[f_3 - f_1]{f_2 - 2f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{f_3 - f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{array} \right)$$

Por tanto, la solución es $2z = -1$, $z = -0'5$, $-y - 2z = 3$, $y = -2$, $x + y + z = -1$, $x = 1'5$.

Solución B. 3.
a) El dominio es Dom $f = \mathbb{R} - \{3\}$. Es continua para todo valor de a en su dominio ya que $f(0) = \dfrac{-1}{9}$ y

$$\lim_{x \to 0^-} (x^2 + ax - \frac{1}{9}) = \frac{-1}{9} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x + 1}{x^2 - 9}$$

.

Como $f'(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{-x^2 - 2x - 9}{(x^2 - 9)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ y $\lim_{x \to 0^-} (2x + a) = a = \lim_{x \to 0^+} \dfrac{-x^2 - 2x - 9}{(x^2 - 9)^2} = \dfrac{1}{-9}$. Se sigue que para que f sea derivable en su dominio $\Longrightarrow a = \dfrac{-1}{9}$

b) Asíntota vertical $x = 3$.
Asíntota horizontal:
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty \Longrightarrow$ no tiene asíntota horizontal cuando x tiende a $-\infty$;
$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0, \Longrightarrow$ tiene asíntota horizontal cuando x tiende a ∞, $y = 0$
No tiene asíntotas oblicuas.

Solución B. 4.

$$P(C \cap D) = P(C) + P(D) - P(C \cup D) = 0'4 + 0'6 - 0'8 = 0'2$$

a)

$$P(C|D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{0'2}{0'6} = 0'33$$

b)

$$P(\overline{C \cap D}|C) = \frac{P(C) - P(C \cap D)}{P(C)} = \frac{0'4 - 0'2}{0'4} = 0'5$$

Solución B. 5.

a) El tamaño mínimo de la muestra debe ser de $n = 35$ atletas.

b) $P(\overline{X} > 2700) \approx 1$

ORIENTACIONES correspondientes a la materia: “Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II”

Prueba de Evaluación para el Acceso a las Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado Curso 2020-2021

Para la elaboración de las pruebas se seguirán las características, el diseño y el contenido establecido en el currículo básico de las enseñanzas del segundo curso de bachillerato LOMCE que está publicado en el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato,y Orden PCM/2/2021, de 11 de enero, por la que se determinan las características, el diseño y el contenido de la evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad, y las fechas máximas de realización y de resolución de los procedimientos de revisión de las calificaciones obtenidas en el curso 2020-2021.

La prueba de Evaluación de la asignatura Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II estará compuesta por diez ejercicios, a elegir cinco. Cada ejercicios, valorado con una calificación máxima de 2 puntos, corresponderá a uno de los siguientes bloques: Bloque 2 (Números y Álgebra), Bloque 3 (Análisis) y Bloque 4 (Estadística y Probabilidad). Para la evaluación del Bloque 1 (Procesos, métodos y actitudes en matemáticas), habrá problemas que tendrán un enunciado con texto.

1.- Álgebra.

• Utilización de matrices como forma de representación de situaciones de contexto real.
• Transposición, suma, producto de matrices y producto de matrices por números reales.
• Concepto de inversa de una matriz. Obtención de la inversa de matrices de órdenes dos y tres.
• Determinantes de órdenes dos y tres. • Resolución de ecuaciones matriciales.
• Discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales con dos o tres incógnitas (máximo un parámetro).
• Resolución de problemas con enunciados relativos a las ciencias sociales y a la economía que pueden resolverse mediante el planteamiento de sistemas de ecuaciones lineales con dos o tres incógnitas.
• Interpretación y resolución gráfica de inecuaciones y sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas.
• Iniciación a la programación lineal bidimensional. Región factible. Solución óptima.
• Aplicación de la programación lineal a la resolución de problemas de contexto real con dos variables. Interpretación de la solución obtenida.

2.- Análisis.

• Límite y continuidad de una función en un punto.
• Límites laterales. Ramas infinitas.

• Continuidad de funciones definidas a trozos.
• Determinación de asíntotas de funciones racionales.
• Derivada de una función en un punto. Interpretación geométrica.
• Relación entre continuidad y derivabilidad.
• Derivación de funciones polinómicas, exponenciales y logarítmicas. Reglas de derivación: sumas, productos y cocientes. Composición de funciones polinómicas, exponenciales y logarítmicas.
• Aplicaciones:
    o Cálculo de la tasa de variación instantánea, ritmo de crecimiento, coste marginal, etc.
    o Obtención de la ecuación de la recta tangente a una curva en un punto de la misma.
    o Obtención de extremos relativos, puntos de inflexión e intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función.
    o Resolución de problemas de optimización.
• Estudio y representación gráfica de funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas sencillas a partir de sus propiedades globales y locales.
• Cálculo de integrales definidas inmediatas. Regla de Barrow (Integrales definidas de funciones polinómicas, exponenciales y racionales inmediatas).
• Aplicación de la integral definida al cálculo de áreas planas.

3.- Probabilidad y Estadística.

• Experimentos aleatorios. Concepto de espacio muestral y de suceso elemental.
• Operaciones con sucesos. Leyes de De Morgan.
• Definición de probabilidad. Probabilidad de la unión, intersección, diferencia de sucesos y suceso contrario o complementario.
• Regla de Laplace de asignación de probabilidades.
• Probabilidad condicionada. Teorema del Producto, Teorema de la Probabilidad Total y Teorema de Bayes.
• Concepto de población y muestra. Muestreo. Parámetros poblacionales y estadísticos muestrales.
• Distribuciones de probabilidad de las medias muestrales y de la proporción muestral. Aproximación por la distribución normal.
• Intervalo de confianza para la media de una distribución normal de desviación típica conocida. Tamaño muestral mínimo.
• Intervalo de confianza para la proporción en el caso de muestras grandes.
• Aplicación a casos reales.